UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 20/01/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 1 & 2-k & 0 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta Compatibile per $k \neq 4$; $k \neq 1, 4$ soluz. unica, $k = 1$ ∞^1 soluz. **(pt.3)**
- interpretando x, y, z come coordinate affini in $A_3(\mathbb{R})$ si dicuta la mutua posizione del piano π_k rappresentato dalla prima equazione del sistema e della retta r_k rappresentata dalla seconda e terza equazione;

  Risposta $k \neq 1, 4$ π_k e r_k incidenti, $k = 1$ $r_k \subseteq \pi_k$, $k = 4$ π_k e r_k paralleli e disgiunti **(pt.2)**
- Posto $k = 1$ si determini l'insieme S_1 delle soluzioni di $A_1X = B_1$;

  Risposta $S_1 = \{(-1-2\alpha, 2+2\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi

$$U = \mathcal{L}((1,0,1,0),(1,0,-1,0),(1,1,1,1)), \qquad W_k = \mathcal{L}((1,k,0,0),(k,1,0,0)),$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- le dimensioni di U e W_k

  Risposta $\dim U = 3$, $k \neq \pm 1$ $\dim W_k = 2$, $k = \pm 1$ $\dim W_k = 1$ **(pt.3)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma di U e W_k è diretta;

  Risposta $k = \pm 1$ **(pt.2)**
- una base ortogonale di U.

  Risposta $B = ((1,0,1,0),(1,0,-1,0),(0,1,0,1))$ **(pt.2)**
- posto $k = 2$ si determini il complemento ortogonale di W_2.

  Risposta $\mathcal{L}((0,0,1,0),(0,0,0,1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k :\ x^2 + ky^2 + 2kx + 2y + k + 1 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile e per ciascuno di tali valori si determinino le rette componenti e le coordinate dei punti doppi;

  Risposta $k = 1$, $x+iy+1+i = 0$, $x-iy+1-i = 0$, $D = (-1,-1)$; $k = -1$, $x-y = 0$, $x+y-2 = 0$, $D = (1,1)$ **(pt.3)**
- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ ammette due punti impropri reali e distinti;

  Risposta $k < 0$ **(pt.2)**
- Posto $k = -4$ si riconosca $\mathcal{C}_{-4}$ e se ne determino, se possibile, centro e assi.

  Risposta Iperbole, $C = (4, 1/4)$, assi: $x - 4 = 0$, $4y - 1 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera $\Sigma :\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ e il piano $\pi :\ x - 2y + z = 0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$;

  Risposta $C' = (5/3, 2/3, -1/3)$, raggio $= \sqrt{19/3}$ **(pt.2)**
- equazioni cartesiane dei piani paralleli a π e tangenti a Σ;

  Risposta $x - 2y + z + 4 + 3\sqrt{6} = 0$, $x - 2y + z + 4 - 3\sqrt{6} = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel suo punto $P = (0,0,1)$.

  Risposta $x + 2y - 2z + 2 = 0$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 20/01/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k-1 & 2 \\ 1 & 3-k & 0 \\ k-1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta Compatibile per $k \neq 5$; $k \neq 2, 5$ soluz. unica, $k = 2$ ∞^1 soluz. **(pt.3)**
- interpretando x, y, z come coordinate affini in $A_3(\mathbb{R})$ si dicuta la mutua posizione del piano π_k rappresentato dalla prima equazione del sistema e della retta r_k rappresentata dalla seconda e terza equazione;

  Risposta $k \neq 2, 5$ π_k e r_k incidenti, $k = 2$ $r_k \subseteq \pi_k$, $k = 5$ π_k e r_k paralleli e disgiunti **(pt.2)**
- Posto $k = 2$ si determini l'insieme S_2 delle soluzioni di $A_2 X = B_2$;

  Risposta $S_2 = \{(-1-2\alpha, 2+2\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi

$$U = \mathcal{L}((1,0,1,0), (1,0,-1,0), (-1,-1,-1,-1)), \qquad W_k = \mathcal{L}((3,k,0,0), (k,3,0,0)),$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- le dimensioni di U e W_k

  Risposta $\dim U = 3$, $k \neq \pm 3$ $\dim W_k = 2$, $k = \pm 3$ $\dim W_k = 1$ **(pt.3)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma di U e W_k è diretta;

  Risposta $k = \pm 3$ **(pt.2)**
- una base ortogonale di U.

  Risposta $B = ((1,0,1,0), (1,0,-1,0), (0,1,0,1))$ **(pt.2)**
- posto $k = -5$ si determini il complemento ortogonale di W_{-5}.

  Risposta $\mathcal{L}((0,0,1,0), (0,0,0,1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k : \ x^2 + (k+1)y^2 + 2(k+1)x + 2y + k + 2 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile e per ciascuno di tali valori si determinino le rette componenti e le coordinate dei punti doppi;

  Risposta $k = 0$, $x+iy+1+i = 0$, $x-iy+1-i = 0$, $D = (-1,-1)$; $k = -2$, $x-y = 0$, $x+y-2 = 0$, $D = (1,1)$ **(pt.3)**
- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ ammette due punti impropri reali e distinti;

  Risposta $k < -1$ **(pt.2)**
- Posto $k = 1$ si riconosca $\mathcal{C}_1$ e se ne determino, se possibile, centro e assi.

  Risposta Ellisse, $C = (-2, -1/2)$, assi: $x + 2 = 0$, $2y + 1 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera $\Sigma : \ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 2z + 2 = 0$ e il piano $\pi : \ x - 2y + z + 3 = 0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$;

  Risposta $C' = (-1/6, 4/3, -1/6)$, raggio $= \sqrt{29/6}$ **(pt.2)**
- equazioni cartesiane dei piani paralleli a π e tangenti a Σ;

  Risposta $x - 2y + z + 8 + 3\sqrt{6} = 0$, $x - 2y + z + 8 - 3\sqrt{6} = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel suo punto $P = (-2, 1, 1)$.

  Risposta $x + 2y - 2z + 2 = 0$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 20/01/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k+1 & 2 \\ k+1 & 2 & 2 \\ 1-k & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta Compatibile per $k \neq 3$; $k \neq 0, 3$ soluz. unica, $k = 0$ ∞^1 soluz. **(pt.3)**

- interpretando x, y, z come coordinate affini in $A_3(\mathbb{R})$ si dicuta la mutua posizione del piano π_k rappresentato dalla prima equazione del sistema e della retta r_k rappresentata dalla seconda e terza equazione;

  Risposta $k \neq 0, 3$ π_k e r_k incidenti, $k = 0$ $r_k \subseteq \pi_k$, $k = 3$ π_k e r_k paralleli e disgiunti **(pt.2)**

- Posto $k = 0$ si determini l'insieme S_0 delle soluzioni di $A_0X = B_0$;

  Risposta $S_0 = \{(2 + 2\alpha, -1 - 2\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi

$$U = \mathcal{L}((0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (1, 1, 1, 1)), \qquad W_k = \mathcal{L}((2, k, 0, 0), (k, 2, 0, 0)),$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- le dimensioni di U e W_k

  Risposta $\dim U = 3$, $k \neq \pm 2$ $\dim W_k = 2$, $k = \pm 2$ $\dim W_k = 1$ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma di U e W_k è diretta;

  Risposta $k = \pm 2$ **(pt.2)**

- una base ortogonale di U.

  Risposta $B = ((0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (1, 0, 1, 0))$ **(pt.2)**

- posto $k = 3$ si determini il complemento ortogonale di W_3.

  Risposta $\mathcal{L}((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k$: $(k - 1)x^2 + y^2 + 2x + 2(k - 1)y + k = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile e per ciascuno di tali valori si determinino le rette componenti e le coordinate dei punti doppi;

  Risposta $k = 2$, $x+iy+1+i = 0$, $x-iy+1-i = 0$, $D = (-1, -1)$; $k = 0$, $x-y = 0$, $x+y-2 = 0$, $D = (1, 1)$ **(pt.3)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ ammette due punti impropri reali e distinti;

  Risposta $k < 1$ **(pt.2)**

- Posto $k = 3$ si riconosca $\mathcal{C}_3$ e se ne determino, se possibile, centro e assi.

  Risposta Ellisse, $C = (-1/2, -2)$, assi: $2x + 1 = 0$, $y + 2 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera Σ : $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0$ e il piano π : $x - 2y + z + 1 = 0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$;

  Risposta $C' = (1/2, 1, 1/2)$, raggio $= \sqrt{15/2}$ **(pt.2)**

- equazioni cartesiane dei piani paralleli a π e tangenti a Σ;

  Risposta $x - 2y + z + 4 + 3\sqrt{6} = 0$, $x - 2y + z + 4 - 3\sqrt{6} = 0$ **(pt.2)**

- un'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel suo punto $P = (-1, 0, 2)$.

  Risposta $x + 2y - 2z + 5 = 0$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 20/01/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2-k & 2 \\ 0 & k & 1 \\ 2 & 0 & 2-k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-k \\ -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta Compatibile per $k \neq -2$; $k \neq 1, -2$ soluz. unica, $k = 1$ ∞^1 soluz. **(pt.3)**
- interpretando x, y, z come coordinate affini in $A_3(\mathbb{R})$ si dicuta la mutua posizione del piano π_k rappresentato dalla prima equazione del sistema e della retta r_k rappresentata dalla seconda e terza equazione;

  Risposta $k \neq 1, -2$ π_k e r_k incidenti, $k = 1$ $r_k \subseteq \pi_k$, $k = -2$ π_k e r_k paralleli e disgiunti **(pt.2)**
- Posto $k = 1$ si determini l'insieme S_1 delle soluzioni di $A_1X = B_1$;

  Risposta $S_1 = \{(\alpha, 2 + 2\alpha, -1 - 2\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi

$$U = \mathcal{L}((0,1,0,1), (0,1,0,-1), (-1,-1,-1,-1)), \qquad W_k = \mathcal{L}((0,0,1,k), (0,0,k,1)),$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- le dimensioni di U e W_k

  Risposta $\dim U = 3$, $k \neq \pm 1$ $\dim W_k = 2$, $k = \pm 1$ $\dim W_k = 1$ **(pt.3)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma di U e W_k è diretta;

  Risposta $k = \pm 1$ **(pt.2)**
- una base ortogonale di U.

  Risposta $B = ((0,1,0,1), (0,1,0,-1), (1,0,1,0))$ **(pt.2)**
- posto $k = -2$ si determini il complemento ortogonale di W_{-2}.

  Risposta $\mathcal{L}((1,0,0,0), (0,1,0,0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k :\ (k+1)x^2 + y^2 + 2x + 2(k+1)y + k + 2 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile e per ciascuno di tali valori si determinino le rette componenti e le coordinate dei punti doppi;

  Risposta $k = 0$, $x + iy + 1 + i = 0$, $x - iy + 1 - i = 0$, $D = (-1,-1)$; $k = -2$, $x - y = 0$, $x + y - 2 = 0$, $D = (1,1)$ **(pt.3)**
- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ ammette due punti impropri reali e distinti;

  Risposta $k < -1$ **(pt.2)**
- Posto $k = -3$ si riconosca $\mathcal{C}_{-3}$ e se ne determino, se possibile, centro e assi.

  Risposta Iperbole, $C = (1/2, 2)$, assi: $2x - 1 = 0$, $y - 2 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera $\Sigma :\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 4z + 3 = 0$ e il piano $\pi :\ x - 2y + z + 1 = 0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$;

  Risposta $C' = (5/2, 1, -3/2)$, raggio $= \sqrt{15/2}$ **(pt.2)**
- equazioni cartesiane dei piani paralleli a π e tangenti a Σ;

  Risposta $x - 2y + z + 4 + 3\sqrt{6} = 0$, $x - 2y + z + 4 - 3\sqrt{6} = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel suo punto $P = (1,0,0)$.

  Risposta $x + 2y - 2z - 1 = 0$ **(pt.2)**