UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o test - 11/11/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ k & 1 & 0 \\ k-1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = 0, 2$; $k = 0, 2$ soluz. unica **(pt.4)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $(1, 0, 0)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = 0$ **(pt.2)**

- posto ora $k = 2$ si determini l'insieme S_2 delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S_2 = \{(-1, 2, 2/3)\}$ **(pt.2)**

- si determini un complemento diretto di $\mathcal{L}(S_2)$.

  Risposta $\mathcal{L}(((0, 1, 0), (0, 0, 1)))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino le sequenze $A = ((1, 0, 1, 0), (-1, 2, 0, 1))$ e $B_k = ((0, k, 2, 1), (1, k, 1, k), (2, 1, 0, 1))$ e i sottospazi $U = \mathcal{L}(A)$ e $W_k = \mathcal{L}(B_k)$, dove $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base e la dimensione di W_k e di U;

  Risposta $k \neq 1$ $\dim W_k = 3$, $\mathcal{B}_{W_k} = B_k$; $k = 1$ $\dim W_1 = 2$ $\mathcal{B}_{W_1} = ((0, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 1))$; $\dim U = 2$, $\mathcal{B}_U = A$ **(pt.3)**

- le dimensioni di $U + W_k$ e di $U \bigcap W_k$;

  Risposta $k \neq 1$ $\dim(U + W_k) = 4$, $\dim(U \cap W_k) = 1$; $k = 1$ $\dim(U + W_1) = 4$, $\dim(U \cap W_1) = 0$ **(pt.4)**

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta.

  Risposta $k = 1$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & k \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $1,\ 2 - k,\ 2 + k$ **(pt.2)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k ammette autovalori di molteplicità algebrica 2;

  Risposta $k = \pm 1, 0$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui il vettore $(1, 3, 3)$ è un autovettore di A_k.

  Risposta $k = 2$ **(pt.2)**

- posto $k = 1$ si determinino, se esistono, gli autovalori di A_1 di molteplicità geometrica 2;

  Risposta Non esistono autovalori di molteplicità geometrica 2 **(pt.3)**

Posto $k = 0$ si determino una matrice diagonale D simile ad A_0 e la relativa matrice diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o test - 11/11/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA