UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o test - 3/11/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 \\ k+1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & k \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall\ k \in \mathbb{R}$; $k \neq 1$ ∞^1 soluz., $k = 1$ ∞^2 soluz. ______ **(pt.4)**

Posto $k = 1$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(\alpha, 5+\beta, -1-\alpha-\beta, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**

- la dimensione di $\mathcal{L}(S)$;

  Risposta $\dim \mathcal{L}(S) = 3$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\mathbf{v} = (0, 2h, 0, -2)$ appartiene a $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta $h = 4$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \{(\alpha+\beta, \beta-\gamma, 2\alpha+2\gamma, -\alpha-\beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ e $W_k = \mathcal{L}(A_k)$, dove $A_k = ((2k, -1, 1, k), (0, 0, k, -k), (2, 1, k+1, 0))$ e $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base e la dimensione di U e di W_k;

  Risposta $B_U = ((1, 0, 2, -1), (1, 1, 0, -1))$ $\dim U = 2$,
  $k \neq -1, 0$ $B_{W_k} = A_k$ $\dim W_k = 3$, $k = -1, 0$ $B_{W_k} = ((2k, -1, 1, k), (2, 1, k+1, 0))$, $\dim W_k = 2$
  (pt.5)

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta;

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.3)**

- un complemento diretto di U.

  Risposta $\mathcal{L}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\pm 2,\ k-1$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui gli autovalori di A sono distinti;

  Risposta $k \neq 3, -1$ ______ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui il vettore $(5, 1, -1)$ è un autovettore di A_k, e il corrispondente autovalore;

  Risposta $k = 4$, $\lambda = 3$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui gli autospazi relativi ad autovalori distinti sono in somma diretta;

  Risposta $\forall\ k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o test - 3/11/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k-1 & 1 \\ 0 & k & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & k-1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall\, k \in \mathbb{R}$; $k \neq 2$ ∞^1 soluz., $k = 2$ ∞^2 soluz. ______ **(pt.4)**

Posto $k = 2$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(5+\beta, \alpha, -1-\alpha-\beta, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**

- la dimensione di $\mathcal{L}(S)$;

  Risposta $\dim \mathcal{L}(S) = 3$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\mathbf{v} = (4h, 0, 0, -2)$ appartiene a $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta $h = 2$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \{(\alpha+\beta, 2\alpha+2\gamma, \beta-\gamma, -\alpha-\beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ e $W_k = \mathcal{L}(A_k)$, dove $A_k = ((2k+4, 1, -1, k+2), (0, k+2, 0, -k-2), (2, k+3, 1, 0))$ e $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base e la dimensione di U e di W_k;

  Risposta $B_U = ((1,2,0,-1), (1,0,1,-1))$ $\dim U = 2$,
  $k \neq -3, -2$ $B_{W_k} = A_k$ $\dim W_k = 3$, $k = -3, -2$ $B_{W_k} = ((2k+4, 1, -1, k+2), (2, k+3, 1, 0))$, $\dim W_k = 2$ ______ **(pt.5)**

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta;

  Risposta $k = -2$ ______ **(pt.3)**

- un complemento diretto di U.

  Risposta $\mathcal{L}((1,0,0,0), (0,0,1,0))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\pm 4,\ k-2$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui gli autovalori di A sono distinti;

  Risposta $k \neq -2, 6$ ______ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui il vettore $(3, 1, -1)$ è un autovettore di A_k, e il corrispondente autovalore;

  Risposta $k = 1$, $\lambda = -1$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui gli autospazi relativi ad autovalori distinti sono in somma diretta;

  Risposta $\forall\, k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o test - 3/11/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & k+2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & k+1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall\ k \in \mathbb{R}$; $k \neq 0$ ∞^1 soluz., $k = 0$ ∞^2 soluz. **(pt.4)**

Posto $k = 0$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(-1-\alpha-\beta, 5+\beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

- la dimensione di $\mathcal{L}(S)$;

  Risposta $\dim \mathcal{L}(S) = 3$ **(pt.2)**

- i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\mathbf{v} = (0, 0, h, 5)$ appartiene a $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta $h = -4$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \{(-\alpha-\beta, \beta-\gamma, 2\alpha+2\gamma, \alpha+\beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ e $W_k = \mathcal{L}(A_k)$, dove $A_k = ((k-2, -1, 1, 2k-4), (2-k, 0, k-2, 0), (0, 1, k-1, 2))$ e $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base e la dimensione di U e di W_k;

  Risposta $B_U = ((-1, 0, 2, 1), (-1, 1, 0, 1))$ $\dim U = 2$,
  $k \neq 1, 2$ $B_{W_k} = A_k$ $\dim W_k = 3$, $k = 1, 2$ $B_{W_k} = ((k-2, -1, 1, 2k-4), (0, 1, k-1, 2))$, $\dim W_k = 2$ **(pt.5)**

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta;

  Risposta $k = 2$ **(pt.3)**

- un complemento diretto di U.

  Risposta $\mathcal{L}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\pm 5,\ k+1$ **(pt.2)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui gli autovalori di A sono distinti;

  Risposta $k \neq -6, 4$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui il vettore $(9, 1, -1)$ è un autovettore di A_k, e il corrispondente autovalore;

  Risposta $k = 3$, $\lambda = 4$ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui gli autospazi relativi ad autovalori distinti sono in somma diretta;

  Risposta $\forall\ k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o test - 3/11/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k-2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & k-1 \\ k-2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall\ k \in \mathbb{R}$; $k \neq 3$ ∞^1 soluz., $k = 3$ ∞^2 soluz. **(pt.4)**

Posto $k = 3$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(\beta, 5+\beta, -1-\alpha-\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

- la dimensione di $\mathcal{L}(S)$;

  Risposta $\dim \mathcal{L}(S) = 3$ **(pt.2)**

- i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\mathbf{v} = (5, 0, 2h, 0)$ appartiene a $\mathcal{L}(S)$.

  Risposta $h = -2$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \{(\beta-\gamma, 2\alpha+2\gamma, -\alpha-\beta, \alpha+\beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ e $W_k = \mathcal{L}(A_k)$, dove $A_k = ((-1, 1, k-4, 2k-8), (0, k-4, 4-k, 0), (1, k-3, 0, 2))$ e $k \in \mathbb{R}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base e la dimensione di U e di W_k;

  Risposta $B_U = ((0, 2, -1, 1), (1, 0, -1, 1))$ $\dim U = 2$,
  $k \neq 3, 4$ $B_{W_k} = A_k$ $\dim W_k = 3$, $k = 3, 4$ $B_{W_k} = ((-1, 1, k-4, 2k-8), (1, k-3, 0, 2))$, $\dim W_k = 2$ **(pt.5)**

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta;

  Risposta $k = 4$ **(pt.3)**

- un complemento diretto di U.

  Risposta $\mathcal{L}((1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\pm 3,\ k-3$ **(pt.2)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui gli autovalori di A sono distinti;

  Risposta $k \neq 0, 6$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, per cui il vettore $(5, 1, -1)$ è un autovettore di A_k, e il corrispondente autovalore;

  Risposta $k = 5$, $\lambda = 2$ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui gli autospazi relativi ad autovalori distinti sono in somma diretta;

  Risposta $\forall\ k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**