UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o appello - 10/02/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 2 & 1 \\ 0 & k & k & 1 \\ 1 & 1 & k+2 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta Compatibile per ogni $k \in \mathbb{R}$; $k \neq 1$ ∞^1 soluz., $k = 1$ ∞^2 soluz. ______ **(pt.3)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $(0, 0, 0, 0)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.1)**
- Posto $k = 1$ si determini l'insieme S_1 delle soluzioni di $A_1X = B_1$;

  Risposta $S_1 = \{(1 - 2\alpha - \beta, -1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si consideri il sottospazio $U_k = \mathcal{L}(A_k)$ dove

$$A_k = ((1, 0, k, 1), (k, 0, 1, 1), (1, -1, 2, k))$$

e k è un parametro reale.

- Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di U_k;

  Risposta $k \neq 1$ $\dim U_k = 3$, $\mathcal{B}_{U_k} = A_k$, $k = 1$ $\dim U_1 = 2$, $\mathcal{B}_{U_1} = ((1, 0, 1, 1), (1, -1, 2, 1))$ ______ **(pt.2)**
- posto $k = 0$ si determinino il complemento ortogonale $U_0^\perp$ di U_0 e un complemento diretto W distinto da $U_0^\perp$;

  Risposta $U_0^\perp = \mathcal{L}((-1, -3, -1, 1))$, $W = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k :\ x^2 + 4y^2 + 2kxy + 2y + 1 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile;

  Risposta $k = \pm\sqrt{3}$ ______ **(pt.2)**
- si riconoscano, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coniche generali;

  Risposta $-2 < k < 2$ e $k \neq \pm\sqrt{3}$ ellisse, $k = \pm 2$ parabola, $k < -2 \vee k > 2$ iperbole ______ **(pt.3)**
- Posto $k = 2$ si determino, se possibile, centro, asintoti, assi e vertici della conica $\mathcal{C}_2$.

  Risposta $C = [(-2, 1, 0)]$, $a :\ 5x + 10y + 2 = 0$, $V = (19/25, -29/50)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & k^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;

  Risposta $1,\ k,\ -k$ ______ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -1, 0$ ______ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.1)**
- per ciascuno dei valori trovati al punto precedente una matrice D simile ad A_k e una matrice P diagonalizzante ortogonale.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la retta $r :\ 2x + y - 3 = z = 0$.

- Si determini un'equazione cartesiana del luogo $\mathcal{L}$ descritto dalla retta r nella rotazione attorno all'asse y;

  Risposta $4x^2 - y^2 + 4z^2 + 6y - 9 = 0$ ______ **(pt.3)**
- si riconosca $\mathcal{L}$.

  Risposta Cono di vertice $(0, 3, 0)$ ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o appello - 10/02/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 3 & 1 \\ k-1 & 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & k+3 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 1-k \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta Compatibile per ogni $k \in \mathbb{R}$; $k \neq 2$ ∞^1 soluz., $k = 2$ ∞^2 soluz. ______ **(pt.3)**

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $(0,0,0,0)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.1)**

- Posto $k = 2$ si determini l'insieme S_2 delle soluzioni di $A_2 X = B_2$;

  Risposta $S_2 = \{(-1-2\alpha-\beta, 1-3\alpha-\beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si consideri il sottospazio $U_k = \mathcal{L}(A_k)$ dove

$$A_k = ((2,0,k,1),(k,0,2,1),(1,1,-2,k))$$

e k è un parametro reale.

- Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di U_k;

  Risposta $k \neq 2$ $\dim U_k = 3$, $\mathcal{B}_{U_k} = A_k$, $k = 2$ $\dim U_2 = 2$, $\mathcal{B}_{U_2} = ((2,0,2,1),(1,1,-2,2))$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 0$ si determinino il complemento ortogonale $U_0^\perp$ di U_0 e un complemento diretto W distinto da $U_0^\perp$;

  Risposta $U_0^\perp = \mathcal{L}((1,1,1,-2))$, $W = \mathcal{L}((1,0,0,0))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k : \; x^2 + 4y^2 + 2(k+1)xy + 2x + 1 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile;

  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.2)**

- si riconoscano, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coniche generali;

  Risposta $-3 < k < 1$ e $k \neq -1$ ellisse, $k = -3, 1$ parabola, $k < -3 \vee k > 1$ iperbole ______ **(pt.3)**

- Posto $k = 1$ si determino, se possibile, centro, asintoti, assi e vertici della conica $\mathcal{C}_1$.

  Risposta $C = [(-2,1,0)]$, $a : \; 5x + 10y + 1 = 0$, $V = (-13/25, 4/25)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & (k+1)^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;

  Risposta $-1, \; k+1, \; -k-1$ ______ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -2, -1$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.1)**

- per ciascuno dei valori trovati al punto precedente una matrice D simile ad A_k e una matrice P diagonalizzante ortogonale.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la retta $r : \; x + 2y - 3 = z = 0$.

- Si determini un'equazione cartesiana del luogo $\mathcal{L}$ descritto dalla retta r nella rotazione attorno all'asse x;

  Risposta $x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 6x + 9 = 0$ ______ **(pt.3)**

- si riconosca $\mathcal{L}$.

  Risposta Cono di vertice $(3,0,0)$ ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o appello - 10/02/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k+1 & 1 \\ k+1 & k+1 & 0 & 1 \\ k+3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ -k-1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta Compatibile per ogni $k \in \mathbb{R}$; $k \neq 0$ ∞^1 soluz., $k = 0$ ∞^2 soluz. **(pt.3)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $(0,0,0,0)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = -1$ **(pt.1)**
- Posto $k = 0$ si determini l'insieme S_0 delle soluzioni di $A_0X = B_0$;

  Risposta $S_0 = \{(\alpha, -1-\alpha-\beta, 1-2\alpha-\beta, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si consideri il sottospazio $U_k = \mathcal{L}(A_k)$ dove

$$A_k = ((-1,0,k,1), (-1,0,1,k), (0,-3,k,1))$$

e k è un parametro reale.

- Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di U_k;

  Risposta $k \neq 1$ $\dim U_k = 3$, $\mathcal{B}_{U_k} = A_k$, $k = 1$ $\dim U_1 = 2$, $\mathcal{B}_{U_1} = ((-1,0,1,1),(0,-3,1,1))$ **(pt.2)**
- posto $k = 0$ si determinino il complemento ortogonale $U_0^\perp$ di U_0 e un complemento diretto W distinto da $U_0^\perp$;

  Risposta $U_0^\perp = \mathcal{L}((3,1,3,3))$, $W = \mathcal{L}((1,0,0,0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k :\ 3x^2 + 3y^2 + 2kxy + 2y + 1 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile;

  Risposta $k = \pm\sqrt{6}$ **(pt.2)**
- si riconoscano, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coniche generali;

  Risposta $-3 < k < 3$ e $k \neq \pm\sqrt{6}$ ellisse, $k = \pm 3$ parabola, $k < -3 \vee k > 3$ iperbole **(pt.3)**
- Posto $k = -3$ si determino, se possibile, centro, asintoti, assi e vertici della conica $\mathcal{C}_{-3}$.

  Risposta $C = [(1,1,0)]$, $a :\ 6x - 6y - 1 = 0$, $V = (-9/24, -13/24)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & k+1 & k^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;

  Risposta $1,\ k,\ -k$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 0, 1$ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = -1$ **(pt.1)**
- per ciascuno dei valori trovati al punto precedente una matrice D simile ad A_k e una matrice P diagonalizzante ortogonale.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la retta $r :\ y + 2z - 1 = x = 0$.

- Si determini un'equazione cartesiana del luogo $\mathcal{L}$ descritto dalla retta r nella rotazione attorno all'asse y;

  Risposta $4x^2 - y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0$ **(pt.3)**
- si riconosca $\mathcal{L}$.

  Risposta Cono di vertice $(0,1,0)$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o appello - 10/02/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+3 & 1 & 2 \\ 0 & 2k & k & 1 \\ k & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \\ k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta Compatibile per ogni $k \in \mathbb{R}$; $k \neq 1$ ∞^1 soluz., $k = 1$ ∞^2 soluz. **(pt.3)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $(0, 0, 0, 0)$ è soluzione del sistema;

  Risposta $k = 0$ **(pt.1)**
- Posto $k = 1$ si determini l'insieme S_1 delle soluzioni di $A_1X = B_1$;

  Risposta $S_1 = \{(1 - 2\alpha - \beta, \alpha, -1 - 2\alpha - \beta, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si consideri il sottospazio $U_k = \mathcal{L}(A_k)$ dove

$$A_k = ((3, k, 0, 2), (k, 3, 0, 2), (k, 0, -1, 4))$$

e k è un parametro reale.

- Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di U_k;

  Risposta $k \neq 3$ $\dim U_k = 3$, $\mathcal{B}_{U_k} = A_k$, $k = 3$ $\dim U_3 = 2$, $\mathcal{B}_{U_3} = ((3, 3, 0, 2), (3, 0, -1, 4))$ **(pt.2)**
- posto $k = 0$ si determinino il complemento ortogonale $U_0^\perp$ di U_0 e un complemento diretto W distinto da $U_0^\perp$;

  Risposta $U_0^\perp = \mathcal{L}((-2, -2, 12, 3))$, $W = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k :\ 9x^2 + y^2 + 2kxy + 2x - 1 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile;

  Risposta $k = \pm\sqrt{10}$ **(pt.2)**
- si riconoscano, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coniche generali;

  Risposta $-3 < k < 3$ ellisse, $k = \pm 3$ parabola, $k < -3 \vee k > 3$ e $k \neq \pm\sqrt{10}$ iperbole **(pt.3)**
- Posto $k = 3$ si determino, se possibile, centro, asintoti, assi e vertici della conica $\mathcal{C}_3$.

  Risposta $C = [(1, -3, 0)]$, $a :\ 30x + 10y + 3 = 0$, $V = (91/200, -333/200)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & k+1 & (k-1)^2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;

  Risposta $-4,\ 2k - 2,\ 2 - 2k$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 1, 3$ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = -1$ **(pt.1)**
- per ciascuno dei valori trovati al punto precedente una matrice D simile ad A_k e una matrice P diagonalizzante ortogonale.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la retta $r :\ 2x + y - 5 = z = 0$.

- Si determini un'equazione cartesiana del luogo $\mathcal{L}$ descritto dalla retta r nella rotazione attorno all'asse y;

  Risposta $4x^2 - y^2 + 4z^2 + 10y - 25 = 0$ **(pt.3)**
- si riconosca $\mathcal{L}$.

  Risposta Cono di vertice $(0, 5, 0)$ **(pt.2)**