

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2° test - 19/12/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino le rette $r_k : x + ky - 2 = 0 = 2y - kz - k$ e $s : x - y - z - 1 = 0 = z - 1$ e il punto $P = (1, 0, 2)$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due rette sono sghembe.

Risposta $k \neq -1, 0$ _____ (pt.3)

Posto $k = 1$ si determinino:

- equazioni cartesiane dei piani paralleli che contengono r_1 e s ;

Risposta $\pi_1 : x - y + z - 1 = 0$, $\pi_2 : x - y + z - 3 = 0$ _____ (pt.4)

- le coordinate del punto H proiezione ortogonale di P su s

Risposta $H = (3/2, -1/2, 1)$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : 6x^2 - 2kxy + 4x + 2y - 2 = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica \mathcal{C}_k è degenere, e per tali valori le coordinate dei punti doppi di \mathcal{C}_k ;

Risposta $k = -1$, $P_1 = (-1, 4)$, $k = 3$, $P_2 = (1/3, 4/3)$ _____ (pt.4)

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui \mathcal{C}_k è, rispettivamente, un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

Risposta $k \neq -1, 0, 3$ iperbole, $k = 0$ parabola _____ (pt.2)

Posto $k = 1$ si determinino le coordinate omogenee del centro e dei punti impropri P_∞ e Q_∞ di \mathcal{C}_1 .

Risposta $C = [(1, 8, 1)]$, $P_\infty = [(0, 1, 0)]$, $Q_\infty = [(1, 3, 0)]$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino il punto $V_\infty = [(1, 0, 0, 0)]$ e la circonferenza $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0 = x - y$.

- Si determinino centro e raggio della circonferenza \mathcal{C} ;

Risposta $C = (0, 0, 0)$, $R = 1$ _____ (pt.4)

- si determini un'equazione cartesiana del cilindro \mathcal{Q} ottenuto proiettando da V_∞ i punti di \mathcal{C} ;

Risposta $2y^2 + z^2 - 1 = 0$ _____ (pt.4)

- si dica, motivando la risposta, se il cilindro \mathcal{Q} è ellittico, iperbolico o parabolico.

Risposta \mathcal{Q} è ellittico perché \mathcal{C} , che è una sua sezione irriducibile, è un'ellisse _____ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2° test - 19/12/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino le rette $r_k : (k+2)y + z - 2 = 0 = (k+2)x - 2y + k + 2$ e $s : y - z + 2 = 0 = x - 1$ e il punto $P = (2, 2, 1)$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due rette sono sghembe.

Risposta $k \neq -3, -2$ _____ (pt.3)

Posto $k = 1$ si determinino:

- equazioni cartesiane dei piani paralleli che contengono r_1 e s ;

Risposta $\pi_1 : 6x - y + z + 4 = 0$, $\pi_2 : 6x - y + z - 8 = 0$ _____ (pt.4)

- le coordinate del punto H proiezione ortogonale di P su s

Risposta $H = (1, 1/2, 5/2)$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : kx^2 + xy + 2y^2 + (1-2k)x - 2y - 4 = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica \mathcal{C}_k è degenera, e per tali valori le coordinate dei punti doppi di \mathcal{C}_k ;

Risposta $k = -3$, $P_1 = (6/5, 1/5)$, $k = 0$, $P_2 = (6, -1)$ _____ (pt.4)

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui \mathcal{C}_k è, rispettivamente, un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

Risposta $k < 1/8, k \neq 0, -3$ iperbole, $k = 1/8$ parabola, $k > 1/8$ ellisse _____ (pt.2)

Posto $k = 1/2$ si determinino le coordinate omogenee del centro e dei punti impropri P_∞ e Q_∞ di $\mathcal{C}_{1/2}$.

Risposta $C = [(-2, 2, 3)]$, $P_\infty, Q_\infty = [(-1 \pm i\sqrt{3}, 1, 0)]$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino il punto $V_\infty = [(0, 0, 1, 0)]$ e la circonferenza $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 1 = 0 = y + z$.

- Si determinino centro e raggio della circonferenza \mathcal{C} ;

Risposta $C = (1, 1/2, -1/2)$, $R = \sqrt{5/2}$ _____ (pt.4)

- si determini un'equazione cartesiana del cilindro \mathcal{Q} ottenuto proiettando da V_∞ i punti di \mathcal{C} ;

Risposta $x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$ _____ (pt.4)

- si dica, motivando la risposta, se il cilindro \mathcal{Q} è ellittico, iperbolico o parabolico.

Risposta \mathcal{Q} è ellittico perché \mathcal{C} , che è una sua sezione irriducibile, è un'ellisse _____ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2° test - 19/12/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino le rette $r_k : (k+1)x + y - 2 = 0 = 2x - (k+1)z - k - 1$ e $s : x - y + z + 1 = 0 = z - 1$ e il punto $P = (-1, 1, 2)$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due rette sono sghembe.

Risposta $k \neq -2, -1$ _____ (pt.3)

Posto $k = 0$ si determinino:

- equazioni cartesiane dei piani paralleli che contengono r_0 e s ;

Risposta $\pi_1 : x - y - z + 1 = 0$, $\pi_2 : x - y - z + 3 = 0$ _____ (pt.4)

- le coordinate del punto H proiezione ortogonale di P su s

Risposta $H = (-1, 1, 1)$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : 6x^2 + 2(1-k)xy + 4kx + 2y - 6 = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica \mathcal{C}_k è degenere, e per tali valori le coordinate dei punti doppi di \mathcal{C}_k ;

Risposta $k = 0$, $P_1 = (-1, 6)$, $k = 4$, $P_2 = (1/3, 10/3)$ _____ (pt.4)

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui \mathcal{C}_k è, rispettivamente, un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

Risposta $k \neq 0, 1, 4$ iperbole, $k = 1$ parabola _____ (pt.2)

Posto $k = -1$ si determinino le coordinate omogenee del centro e dei punti impropri P_∞ e Q_∞ di \mathcal{C}_{-1} .

Risposta $C = [(-1, 5, 2)]$, $P_\infty = [(0, 1, 0)]$, $Q_\infty = [(2, -3, 0)]$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino il punto $V_\infty = [(0, 1, 0, 0)]$ e la circonferenza $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 10 = 0 = y - z$.

- Si determinino centro e raggio della circonferenza \mathcal{C} ;

Risposta $C = (0, 0, 0)$, $R = \sqrt{10}$ _____ (pt.4)

- si determini un'equazione cartesiana del cilindro \mathcal{Q} ottenuto proiettando da V_∞ i punti di \mathcal{C} ;

Risposta $x^2 + 2z^2 - 10 = 0$ _____ (pt.4)

- si dica, motivando la risposta, se il cilindro \mathcal{Q} è ellittico, iperbolico o parabolico.

Risposta \mathcal{Q} è ellittico perché \mathcal{C} , che è una sua sezione irriducibile, è un'ellisse _____ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2° test - 19/12/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino le rette $r_k : x + (k-2)z - 2 = 0 = (k-2)y - 2z + k - 2$ e $s : x - z - 2 = 0 = y - 1$ e il punto $P = (1, 3, 2)$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due rette sono sghembe.

Risposta $k \neq 1, 2$ _____ (pt.3)

Posto $k = 5$ si determinino:

- equazioni cartesiane dei piani paralleli che contengono r_5 e s ;

Risposta $\pi_1 : x + 6y - z + 4 = 0$. $\pi_2 : x + 6y - z - 8 = 0$ _____ (pt.4)

- le coordinate del punto H proiezione ortogonale di P su s

Risposta $H = (5/2, 1, 1/2)$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : (1-k)x^2 + 2xy + 4y^2 + 2(2-k)x - 4 = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica \mathcal{C}_k è degenere, e per tali valori le coordinate dei punti doppi di \mathcal{C}_k ;

Risposta $k = 1, P_1 = (4, -1), k = 7, P_2 = (-4/5, 1/5)$ _____ (pt.4)

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui \mathcal{C}_k è, rispettivamente, un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

Risposta $k < 3/4$, ellisse, $k = 3/4$, parabola, $k > 3/4, k \neq 1, 7$ iperbole _____ (pt.2)

Posto $k = 3/4$ si determinino le coordinate omogenee del centro e dei punti impropri P_∞ e Q_∞ di $\mathcal{C}_{3/4}$.

Risposta $C_\infty = P_\infty = Q_\infty = [(-4, 1, 0)]$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino il punto $V_\infty = [(0, 1, 0, 0)]$ e la circonferenza $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 0 = y - 2$.

- Si determinino centro e raggio della circonferenza \mathcal{C} ;

Risposta $C = (-1, 2, 0), R = 1$ _____ (pt.4)

- si determini un'equazione cartesiana del cilindro \mathcal{Q} ottenuto proiettando da V_∞ i punti di \mathcal{C} ;

Risposta $x^2 + z^2 + 2x = 0$ _____ (pt.4)

- si dica, motivando la risposta, se il cilindro \mathcal{Q} è ellittico, iperbolico o parabolico.

Risposta \mathcal{Q} è ellittico perché \mathcal{C} , che è una sua sezione irriducibile, è un'ellisse _____ (pt.3)