UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o test - 22/12/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino al variare del parametro reale k i sottospazi

$$U = \{(\alpha+2\beta+\gamma, \beta+\gamma, \alpha-\gamma, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_k = \mathcal{L}(A_k) \text{ dove } A_k = ((k, -2, 1-2k, 0), (0, 1-k, 0, 1)).$$

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui W_k è il complemento ortogonale di U;

  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.3)**

- si determini una base ortonormale di U;

  Risposta $\big((1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 0)\big)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino i piani α_k : $2x + y - 2z + k = 0$ e β_k : $(k-1)x + ky + 2z - 2 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione dei due piani;

  Risposta $k \neq -1$ α_k e β_k incidenti, $k = -1$ α_{-1} e β_{-1} paralleli e distinti ______ **(pt.3)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i due piani risultano ortogonali;

  Risposta $k = 2$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 1$ si determini un'equazione cartesiana della retta passante per $P = (1, 0, -2)$ e parallela sia ad α_1 che a β_1;

  Risposta $2x + y - 2z - 6 = 0 = y + 2z + 4$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k$: $x^2 + y^2 + 2kxy - 6x - 3 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coordinate degli eventuali punti doppi della conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k \neq \pm 2$ $\mathcal{C}_k$ priva di punti doppi, $k = \pm 2$ $D = (-1, \pm 2)$ ______ **(pt.3)**

- si classifichino, al variare di $k \in \mathbb{R}$ le coniche generali;

  Risposta $k = \pm 1$ parabola, $-1 < k < 1$ ellisse, $k < -1 \vee k > 1$ $k \neq \pm 2$ iperbole ______ **(pt.3)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i punti $P = [(1, 1, 0)]$ e $Q = (4, -1)$ sono coniugati rispetto alla conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.2)**

- Posto $k = 1$ si determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti, assi e vertici della conica $\mathcal{C}_1$.

  Risposta $C_\infty = [(1, -1, 0)]$, a : $2x + 2y - 3 = 0$, $V = (-1/8, 13/8)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una equazione cartesiana del luogo delle rette che proiettano la conica $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0 = x + y$ dal punto $V_\infty = [(0, 1, 2, 0)]$.

Risposta $6x^2 + 4y^2 + z^2 + 8xy - 4xz - 4yz - 4x - 1 = 0$ ______ **(pt.5)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o test - 22/12/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino al variare del parametro reale k i sottospazi

$U = \{(\beta+\gamma, \alpha+2\beta+\gamma, \alpha-\gamma, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ e $W_k = \mathcal{L}(A_k)$ dove $A_k = ((-2, k+1, -1-2k, 0), (-k, 0, 0, 1))$.

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui W_k è il complemento ortogonale di U;

  Risposta $k = 0$ **(pt.3)**

- si determini una base ortonormale di U;

  Risposta $\left((0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 0)\right)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino i piani α_k : $2x + y - 2z + k + 1 = 0$ e β_k : $kx + (k+1)y + 2z - 2 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione dei due piani;

  Risposta $k \neq -2$ α_k e β_k incidenti, $k = -2$ α_{-2} e β_{-2} paralleli e distinti **(pt.3)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i due piani risultano ortogonali;

  Risposta $k = 1$ **(pt.2)**

- posto $k = 0$ si determini un'equazione cartesiana della retta passante per $P = (3, 0, -1)$ e parallela sia ad α_0 che a β_0;

  Risposta $x - 2z - 5 = 0 = y + 2z + 2$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k$: $x^2 + y^2 + 2(k+1)xy - 16x - 8 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coordinate degli eventuali punti doppi della conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k \neq -4, 2$ $\mathcal{C}_k$ priva di punti doppi, $k = -4$ $D = (-1, -3)$, $k = 2$ $D = (-1, 3)$ **(pt.3)**

- si classifichino, al variare di $k \in \mathbb{R}$ le coniche generali;

  Risposta $k = -2, 0$ parabola, $-2 < k < 0$ ellisse, $k < -2 \vee k > 0$ $k \neq -4, 2$ iperbole **(pt.3)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i punti $P = [(1, 1, 0)]$ e $Q = (4, 4)$ sono coniugati rispetto alla conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = -1$ **(pt.2)**

- Posto $k = -2$ si determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti, assi e vertici della conica $\mathcal{C}_{-2}$.

  Risposta $C_\infty = [(1, 1, 0)]$, $a: \ x - y - 4 = 0$, $V = (1/2, -7/2)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una equazione cartesiana del luogo delle rette che proiettano la conica $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 1 = 0 = y + z$ dal punto $V_\infty = [(2, 1, 0, 0)]$.

Risposta $x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 4xy - 4xz + 8yz - 4z - 1 = 0$ **(pt.5)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o test - 22/12/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino al variare del parametro reale k i sottospazi

$U = \{(0, \beta+\gamma, \alpha-\gamma, \alpha+2\beta+\gamma) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ e $W_k = \mathcal{L}(A_k)$ dove $A_k = ((0, -2, 3-2k, k-1), (1, 2-k, 0, 0))$.

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui W_k è il complemento ortogonale di U;

  Risposta $k = 2$ **(pt.3)**

- si determini una base ortonormale di U;

  Risposta $\big((0, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (0, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\big)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino i piani α_k : $2x + y - 2z - k = 0$ e β_k : $(k + 1)x + ky - 2z + 2 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione dei due piani;

  Risposta $k \neq 1$ α_k e β_k incidenti, $k = 1$ α_1 e β_1 paralleli e distinti **(pt.3)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i due piani risultano ortogonali;

  Risposta $k = -2$ **(pt.2)**

- posto $k = -1$ si determini un'equazione cartesiana della retta passante per $P = (0, 3, 3)$ e parallela sia ad α_{-1} che a β_{-1};

  Risposta $x - 2z + 6 = 0 = y + 2z - 9$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k$: $4x^2 + y^2 + 2kxy - 10x - 5 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coordinate degli eventuali punti doppi della conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k \neq \pm 3$ $\mathcal{C}_k$ priva di punti doppi, $k = \pm 3$ $D = (-1, \pm 3)$ **(pt.3)**

- si classifichino, al variare di $k \in \mathbb{R}$ le coniche generali;

  Risposta $k = \pm 2$ parabola, $-2 < k < 2$ ellisse, $k < -2 \vee k > 2$ $k \neq \pm 3$ iperbole **(pt.3)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i punti $P = [(1, 1, 0)]$ e $Q = (1, 0)$ sono coniugati rispetto alla conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = 1$ **(pt.2)**

- Posto $k = 2$ si determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti, assi e vertici della conica $\mathcal{C}_2$.

  Risposta $C_\infty = [(1, -2, 0)]$, a : $2x + y - 2 = 0$, $V = (-1/10, 11/5)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una equazione cartesiana del luogo delle rette che proiettano la conica $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 1 = 0 = x + z$ dal punto $V_\infty = [(0, 2, 1, 0)]$.

Risposta $6x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 4x - 1 = 0$ **(pt.5)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2^o test - 22/12/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino al variare del parametro reale k i sottospazi

$U = \{(\alpha+2\beta+\gamma, \alpha-\gamma, \beta+\gamma, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ e $W_k = \mathcal{L}(A_k)$ dove $A_k = ((-k, 1+2k, -2, 0), (0, 0, k+1, 1))$.

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui W_k è il complemento ortogonale di U;

  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.3)**

- si determini una base ortonormale di U;

  Risposta $\big((1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0)\big)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $E_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino i piani α_k : $2x + y - 2z + k - 1 = 0$ e β_k : $(k-2)x + (k-1)y + 2z - 2 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione dei due piani;

  Risposta $k \neq 0$ α_k e β_k incidenti, $k = 0$ α_0 e β_0 paralleli e distinti ______ **(pt.3)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i due piani risultano ortogonali;

  Risposta $k = 3$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 2$ si determini un'equazione cartesiana della retta passante per $P = (2, 4, 0)$ e parallela sia ad α_2 che a β_2;

  Risposta $x - 2z - 2 = 0 = y + 2z - 4$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k$: $4x^2 + y^2 + 2(k-1)xy - 10x - 5 = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coordinate degli eventuali punti doppi della conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k \neq -2, 4$ $\mathcal{C}_k$ priva di punti doppi, $k = -2$ $D = (-1, -3)$, $k = 4$ $D = (-1, 3)$ ______ **(pt.3)**

- si classifichino, al variare di $k \in \mathbb{R}$ le coniche generali;

  Risposta $k = -1, 3$ parabola, $-1 < k < 3$ ellisse, $k < -1 \vee k > 3$ $k \neq -2, 4$ iperbole ______ **(pt.3)**

- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i punti $P = [(1, 1, 0)]$ e $Q = (0, 5)$ sono coniugati rispetto alla conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.2)**

- Posto $k = -1$ si determinino, se esistono e sono reali, centro, asintoti, assi e vertici della conica $\mathcal{C}_{-1}$.

  Risposta $C_\infty = [(1, 2, 0)]$, a : $2x - y - 2 = 0$, $V = (-1/10, -11/5)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una equazione cartesiana del luogo delle rette che proiettano la conica $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 1 = 0 = x + y$ dal punto $V_\infty = [(1, 0, 2, 0)]$.

Risposta $4x^2 + 6y^2 + z^2 + 8xy - 4xz - 4yz - 4y - 1 = 0$ ______ **(pt.5)**