UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra ed Elementi di Geometria - 3^o appello - 10/04/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono:

- gli autovalori della matrice A_k;
  Risposta $1,\ k-2,\ k+2$ ______ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k ammette tre autovalori distinti;
  Risposta $k \neq -1, 3$ ______ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile
  Risposta $k \neq -1, 3$ ______ **(pt.3)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v} = (-3, 4, 2)$ è un autovettore di A_k, e il corrispondente autovalore.
  Risposta $k = 0, \quad \lambda = 1$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}(A_k)$ e $W = \mathcal{L}(B)$ dove

$$A_k = ((1,0,2,1), (0,0,2,-3), (1, k-2, 2k, -2)), \quad B = ((1,0,1,0), (2,0,1,0), (1,0,2,0))$$

e k è un parametro reale.

- Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di U_k e di W;
  Risposta $k \neq 2 \quad \dim U_k = 3, \quad \mathcal{B}_{U_k} = A_k, \qquad k = 2 \quad \dim U_2 = 2, \quad \mathcal{B}_{U_2} = ((1,0,2,1), (0,0,2,-3)) \qquad \dim W = 2, \quad \mathcal{B}_W = ((1,0,1,0), (2,0,1,0))$ ______ **(pt.3)**
- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v}_k = (0, k, 2, 0)$ appartiene a U_k;
  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.2)**
- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui U_k e W sono in somma diretta.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k :\ kx^2 + 2y^2 + 2xy + 2kx + k = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile; per ciascuno di tali valori si precisino le rette componenti e le coordinate dei punti doppi di $\mathcal{C}_k$;
  Risposta $k = 0, \qquad y = 0, \quad x + y = 0, \qquad D = (0,0)$ ______ **(pt.2)**
- si riconoscano, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coniche generali;
  Risposta $k > 1/2$ ellisse, $k = 1/2$ parabola, $k < 1/2$ e $k \neq 0$ iperbole ______ **(pt.2)**
- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera;
  Risposta $k = -2$ ______ **(pt.1)**
- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ ha centro $C = (-2, 1)$;
  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.3)**
- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la retta $r :\ 3x + 3y + 2 = 0$ ammette come polo un punto improprio.
  Risposta $k = 2$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4 (4bis). In $A_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento affine si considerino le rette $r :\ x + z = 0 = 2x - y + 2z + 1$ e $s_k :\ kx + 2y - 2 = 0 = z + k$, dove $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due rette sono complanari;
  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.1)**
- posto $k = 1$ si determini, se possibile, la distanza tra le rette r e s_1;
  Risposta $d = 1/\sqrt{6}$ ______ **(pt.2)**
- posto $k = 1$ si determini un'equazione cartesiana della retta passante per $P = (0,0,0)$ e incidente sia r che s_1.
  Risposta $x + z = 0 = x + 2y + 2z$ ______ **(pt.2)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra ed Elementi di Geometria - 3^o appello - 10/04/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino, se esistono:

- gli autovalori della matrice A_k;
  Risposta $-3,\ k-1,\ k+1$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k ammette tre autovalori distinti;
  Risposta $k \neq -4, -2$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile
  Risposta $k \neq -4, -2$ **(pt.3)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v} = (-8, 2, 15)$ è un autovettore di A_k, e il corrispondente autovalore.
  Risposta $k = 1, \quad \lambda = -3$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}(A_k)$ e $W = \mathcal{L}(B)$ dove

$$A_k = ((0,1,4,-2),(0,0,2,-3),(k-1,0,2k,-3)), \quad B = ((0,1,1,0),(0,3,1,0),(0,1,3,0))$$

e k è un parametro reale.

- Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di U_k e di W;
  Risposta $k \neq 1 \quad \dim U_k = 3, \quad \mathcal{B}_{U_k} = A_k, \qquad k = 1 \quad \dim U_1 = 2, \quad \mathcal{B}_{U_2} = ((0,1,4,-2),(0,0,2,-3)) \qquad \dim W = 2, \quad \mathcal{B}_W = ((0,1,1,0),(0,3,1,0))$ **(pt.3)**
- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v}_k = (k+1, 0, 2, 0)$ appartiene a U_k;
  Risposta $k = 0$ **(pt.2)**
- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui U_k e W sono in somma diretta.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche $\mathcal{C}_k:\ 2x^2 - ky^2 + 2xy + 2ky - 4x - k = 0$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica $\mathcal{C}_k$ è riducibile; per ciascuno di tali valori si precisino le rette componenti e le coordinate dei punti doppi di $\mathcal{C}_k$;
  Risposta $k = 0, \qquad x = 0, \quad x + y - 2 = 0, \qquad D = (0, 2)$ **(pt.2)**
- si riconoscano, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coniche generali;
  Risposta $k < -1/2$ ellisse, $k = -1/2$ parabola, $k > -1/2$ e $k \neq 0$ iperbole **(pt.2)**
- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera;
  Risposta $k = 2$ **(pt.1)**
- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ ha centro $C = (1, 0)$;
  Risposta $k = -1$ **(pt.3)**
- si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la retta $r:\ 3x + 3y - 4 = 0$ ammette come polo un punto improprio.
  Risposta $k = -2$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4 (4bis). In $A_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento affine si considerino le rette $r:\ 2x + 2y - z + 1 = 0 = x + y$ e $s_k:\ ky - 2z + 2 = 0 = x - k$, dove $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due rette sono complanari;
  Risposta $k = 0$ **(pt.1)**
- posto $k = -1$ si determini, se possibile, la distanza tra le rette r e s_{-1};
  Risposta $d = 1/\sqrt{6}$ **(pt.2)**
- posto $k = -1$ si determini un'equazione cartesiana della retta passante per $P = (0,0,0)$ e incidente sia r che s_{-1}.
  Risposta $x + y = 0 = 2x + y + 2z$ **(pt.2)**